欧氏空间的点集拓扑 2020年11月10日09点37分

在第5章中,我们更自由地使用了的一些基本拓扑性质.的紧实子集和连通子集的通常属性(如它们在高级演算过程中所出现的)基本上是必需的.为了完整起见,我们将在此处简要介绍此材料并附带证明.我们将假设使用第2章A部分附录的内容以及实数的基本属性.

1. 准备阶段

在这里,我们将在某些方面完成A部分第2章附录的内容.

接下来,将表示中的一个开集.索引在的范围内变化,如果,则,表示从到的距离;即

定义1 序列收敛至仅当给定,存在序列的一个索引使得对所有成立.在这种情况下,是序列的极线,且标记为.

命题1 映射在是连续的当且仅当对于U中的每个收敛序列,序列收敛到.

定义2 点是几何的一个极限点仅当对于p在中的每一个领域都包含不同于p的另一个点.

为了避免与序列限制的概念混淆,有时将限制点称为聚类点或累积点.

定义2等效于说p的每个邻域V都包含A的无限多个点。实际上，令q1 = p是定义给出的A的点，并考虑一个球B（p）⊂V，从而 q1∈/ B（p）。 然后有一个点q2 = p，q2∈A∩B（p）。 通过重复该过程，我们在V中获得一个序列{qi}，其中q1∈A都是不同的。 由于{qt}→p，该论点还表明，当且仅当p是A中某些不同点序列的极限时，p才是A的极限点。

应当注意，收敛序列的极限p0具有以下性质：p0的任何邻域都包含该序列的有限数量的点，而集合的极限点p具有较弱的属性，即p的任何邻域都包含该序列 设置的无限多个点。 因此，不包含常数子序列的序列在且仅当作为一个集合仅包含一个极限点时才收敛。 有理数Q给出了一个有趣的例子。可以证明Q是可数的。 即，可以将其制成序列。 由于任意实数附近都存在有理数，因此序列Q的极限点集为实线R.

定义3.如果F的每个极限点都属于F，则集合F⊂Rn是闭合的。A表示的A⊂Rn的闭合是A与极限点的并集.

直观地讲，如果F包含其所有收敛序列的极限，或者说，在传递到极限的操作下，它是不变的，则F是闭合的。 显而易见，集合的闭合是闭合的集合。 方便地约定空集φ是打开的还是关闭的。 开放集和封闭集之间有一个非常简单的关系.

命题2 F⊂Rn在且仅当F的补码Rn-F打开时才闭合.

命题3 映射OF：U only Rn→Rm是连续的，当且仅当对于每个开放集V⊂Rm，F-1（V）是一个开放集.

冠词。 F：当且仅当对于每个闭集A⊂Rm，F-1（A）是闭集时，U⊂Rn→Rm连续.

定义4.设A⊂Rn。 A的边界Bd A是Rn中的点p的集合，因此p的每个邻域都包含A中的点和Rn-A中的点.

定义5 如果存在M∈R，使得所有a∈A的M≥a，则实线R的子集A⊂R的边界在上面。数字M称为A的上限。当A的边界在上面时， A，sup A（或lub A）的一个上界或最小上界是满足以下条件的上界M：给定> 0，则存在一个∈A，使得M − <a。 通过更改上述不等式的符号，我们类似地定义了A的下限和A的下限（或最大下限），即af（或g.l.b. A）.

实数的完全性公理。 令A⊂R为非空且在上方（下方）为界。 然后存在sup A（inf A）.

有几种等效的表示实数系统完整性的基本属性的方式。 我们选择了上面的方法，尽管它不是最直观的，但可能是最有效的方法。 设置以下约定很方便。 如果A⊂R没有在上面（下面）定界，我们说sup A = +∞（inf A =-∞）。 按照这种约定，上述公理可以表述为：每个非空实数集都有一个sup和一个inf.

LEMMA 1.如果给定> 0，则将实数序列{xi}称为柯西序列，存在i0使得| xi，xj | <对于所有i，j> i0。 当且仅当它是柯西序列时，该序列才是收敛的.

定义6.如果给定> 0，则序列{pi}，pi∈Rn是柯西序列，存在一个索引i0，使得距离| pi-pj | <对于所有i，j> i0.

命题4.一个序列{pi}，pi∈Rn，当且仅当它是柯西序列时才收敛.

1. 连接集 2020年11月10日11点00分

定义7 连续曲线α：[a，b]→A⊂Rn称为A中连接α（a）和α（b）的圆弧.

定义8 如果在给定两个点p，q∈A的情况下，在A中存在一个将p连接到q的弧，则A⊂Rn呈弧形连接.

在本书的前面，我们使用连接一词来表示弧向连接（第2-2节）。 由于我们只考虑规则的曲面，因此可以证明是合理的，就像现在所做的那样。 但是，对于Rn的一般子集，弧向连通性的概念过于严格，使用以下定义更为方便.

定义9 当无法写入A = U1∪U2时，A A Rn连接，其中U1和U2是A中的非空开集，而U1∩U2 =φ.

提案5.设A⊂Rn被连接，而B⊂A同时在A中打开和关闭。那么B =φ或B =A.

提议6.令F：A⊂Rn→Rm连续，将A连接起来。 然后连接F（A）.

定义10.实线R的间隔是以下任意集合：a <x <b，a≤x≤b，a <x≤b，a≤x <b，x∈R。 =-∞，b = +∞不排除，因此间隔可以是点，半线或R本身。

提议7.当且仅当A是一个间隔时，才连接A⊂R。

提议8.令f：A⊂Rn→R是连续的，并且A被连接。 假设所有q∈A的f（q）=0。那么f不会改变A中的符号。

提议9.让A⊂Rn呈弧形连接。 然后连接A。

定义11.如果对于每个p∈A并且A中p的每个邻域V在A中存在所有弧形连接的邻域U⊂V，则集合A⊂Rn是局部弧形连接的.

直观上，这意味着A的每个点都具有任意小的弧形连接邻域。 R3中局部弧形连接的一个简单示例是规则曲面。 实际上，对于R3中p的每个p∈S和每个邻域W，在R3中存在p的邻域V⊂W，使得V∩S对R2中的开放盘同胚。 由于开放的圆盘是弧形连接的，因此p∈S的每个邻域W∩S包含一个弧形连接的邻域.

命题10.令A⊂Rn为局部弧形连接集合。 然后，当且仅当它是弧向连接时，才连接A。

1. 紧凑集 2020年11月10日11点38分

定义12.如果集合A⊂Rn包含在Rn的某个球中，则该集合是有界的。 如果集合K⊂Rn是封闭且有界的，则它是紧凑的。

定义13.集A⊂Rn的开盖是一个开集{Uα}，α∈a的族，使得“αUα⊃A。 如果子族{Uβ}β∈B⊂a仍然覆盖A，即“βUβ⊃A，我们说{Uβ}是{Uα}的子覆盖。

提议11.对于集合K⊂Rn，以下断言是等效的：

K是紧凑的.

（海涅·桶）。 K的每个开放式封面都有一个有限的子覆盖.

（博尔扎诺-维尔斯特拉斯）。 K的每个无限子集在K中都有一个极限点.

提议12.令F：K⊂Rn→Rm为连续，令K为紧凑。 那么F（K）是紧的.

命题13。令f：K⊂Rn→R是在紧集K上定义的一个连续函数。然后存在p1，p2∈K，使得

也就是说，f在p1处达到最大值，在p2处达到最小值.

1. 连接组件 2020年11月10日11点53分

提议14.令Cα⊂Rn是一组连通集，使得

定义14.令A⊂Rn和p∈A。包含p的A的所有连接子集的并集称为包含p的A的连接分量。

提议15.令C⊂A⊂Rn为连通集。 然后，连接A中C的闭包C。

冠词。 集合A的连通分量C⊂A⊂Rn在A中闭合。

提案16.令C⊂A⊂Rn是局部弧形连接集A的连接分量。然后C在A中打开。

1. Closed Maps

定义。 令X〜和X为拓扑空间，令f：X〜→X为图； 如果映射f将X〜中的封闭集带入X中的封闭集，则称为封闭.

主张。 f：X〜→X成为闭合映射的必要和充分条件是，给定x∈X且X〜中存在一个开放集U〜⊃f -1（x），X中存在一个开放集U使得 x∈U和f -1（U）⊂U〜.